Egzamin z RRZ, 21.06.2022 godz. 14:00-16:30

Zadanie 1.
Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 spełniającą warunki $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \pi$, $f(1) = 1$, $f(7) = -1$. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y) - y + xf(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= h(x, y) + x + yf(x^2 + y^2), \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \end{aligned}$$

gdzie $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C^1 o nośniku zawartym w kuli jednostkowej $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Wykaż, że

a) Istnieje $M > 0$ takie, że jeżeli $x_0^2 + y_0^2 > M$ to rozwiązanie jest nieograniczone w przód;

b) Istnieją co najmniej 2 nietrywialne rozwiązania okresowe;

Zadanie 2.
Rozwiąż zagadnienie początkowe $\dot{x} = Ax$, $x|_{t=0} = v \in \mathbb{R}^3$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3.
Rozważmy układ

$$\dot{x} = -xy, \qquad \dot{y} = xy - y.$$

Załóżmy, że $x(0), y(0) > 0$. Udowodnij, że rozwiązanie x, y spełnia $x(t) > 0, y(t) > 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Wykaż stabilność punktu $(0, 0)$, tj. udowodnij, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich

$$x(0), y(0) > 0, \quad x^2(0) + y^2(0) < \delta$$

mamy $x^2(t) + y^2(t) < \epsilon$ dla wszystkich $t \geqslant 0$.

Zadanie 4.
Rozstrzygnij, czy dla równania

$$\dot{x} = -x^3 + e^x \sin^2(x^2)$$

rozwiązanie $x \equiv 0$ jest stabilne / asymptotycznie stabilne.